الفصل الأول

2015/2016

امتحان رياضيات/2/

هندسة التصميم الميكانيكي

جامعة دمشق

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

---

(1) (15 درجة) احسب التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$ b) $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}dx$ ; حيث $\alpha$ وسيط

(2) (10 درجات) احسب مساحة السطح الجانبي الناتج عن دوران المنحني $f(x)=x^2$ حول المحور $oy$ والمحدود بين النقطتين $x=0$ و $x=\sqrt{2}$

(3) (15 درجة) نريد تصنيع صندوق مغلق على شكل متوازي مستطيلات حجمه $4608\ m^3$. إذا علمت أن الوجه السفلي ينبغي أن يكون متيناً ولهذا فإن كلفة التصنيع لكل متر مربع هي 5000 ل.س، أما الكلفة لبقية الأوجه فهي 4000 ل.س لكل متر مربع، فأوجد أبعاد الصندوق ذوو الحجم المذكور بحيث تكون الكلفة أقل مايمكن.

(4) (20 درجة) أوجد الحل العام لكلٍ من المعادلتين التفاضيليتين التاليتين:

a) $\cos(x+y)\,dx+(3y^2+2y+\cos(x+y))\,dy=0$

b) $x\frac{dy}{dx}-2y=x^2$

(5) (10 درجات) حل مسألة القيم الحدية $y(2)=0$ ; $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{2y+1}$ ومِن ثَمَّ حدد المجال الذي يكون فيه الحل موجوداً

(6) (10 درجات) لتكن معادلة ريكاتي Ricatti equation معطاة بالشكل $y'+2t\,y=1+t^2+y^2$ والمطلوب:

a) بيّن أن $y_1(t)=t$ هو حل لمعادلة ريكاتي

b) بفرض أن $y(t)=t+(1/v(t))$، وضح بأنه عندئذٍ يمكن كتابة معادلة ريكاتي كمعادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالنسبة للمتحول $v$

مع أطيب الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. اسماعيل ادريس

2015/2016 سلم تصحيح رياضيات/2/ هـ. التصميم الميكانيكي ف 1

**السؤال الأول** a) بما أن $x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$ ، فإن:

$$\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

والآن لنضرب بالمقام المشترك فنجد:

$$5x^2+20x+6 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

بالإصلاح والمقارنة ينتج:

$$A=6\ ,\ B=-1\ ,\ C=9$$

وعليه يمكن أن نكتب:

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}\cdot dx = \int\left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}\right)\cdot dx$$

$$= 6\ln|x| - \ln|x+1| + 9\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \ln\left|\frac{x^6}{x+1}\right| - \frac{9}{x+1} + C$$

---

b) بما أن α وسيط ، فإننا نشتق مبدئياً التكامل بالنسبة للوسيط α ، فنجد:

$$F'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{2\alpha x^2}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)}\cdot dx$$

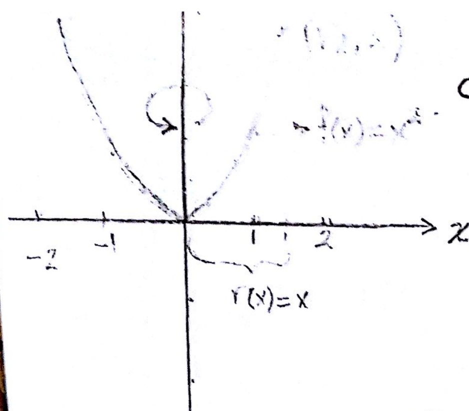
$$= \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+\alpha^2x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\cdot dx$$

$$= \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2}\right)$$

أي أن $F'(\alpha) = \frac{\pi}{1+\alpha}$ ، ولهذا فإن $F(\alpha) = \pi\ln(1+\alpha)$

---

(*) نفرض مبدئياً أن $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}\cdot dx$ ، وبما أن α .




**السؤال الثاني:** لنفرض أن الصدبين منحني التابع $f$ والمحور $oy$ هو $r(x)=x$ ، فلنشتق مبدئياً $f'(x)=2x$

وعندئذ يمكن تحديد مساحة السطح وفق العلاقة التالية:

$$S=2\pi\int_a^b r(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+(2x)^2}\cdot dx$$

$$=\frac{2\pi}{8}\int_0^{\sqrt{2}}(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 8x\cdot dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{6}\left[(1+8)^{3/2}-1\right]=\frac{13\pi}{3}$$

---

**السؤال الثالث:** لنفرض أن أبعاد قاعدة الصندوق (الوجه السفلي) هي $y$ و $x$ ، وليكن ارتفاع الصندوق $z$ ، عندئذ يكون المطلوب ايجاد القيمة الصغرى للتابع $f(x,y,z)=9xy+8xz+8yz$ بشرط أن $g(x,y,z)=xyz=4608$ .

نستخدم هنا نظرية مضاريب لاغرانج ، فنجد

$$9y+8z=\lambda yz\ ,\ 9x+8z=\lambda xz\ ,\ 8x+8y=\lambda xy$$

بما أن $z\neq 0$ و $y\neq 0$ و $x\neq 0$ ، فنحل المعادلات السابقة حلاً مشتركاً ، فنجد

$$\frac{9y+8z}{yz}=\frac{9x+8z}{xz}\Rightarrow 9xy+8xz=9xy+8yz\Rightarrow x=y$$

وبشكل مشابه

$$\frac{9y+8z}{yz}=\frac{8y+8x}{xy}\Rightarrow 9xy+8xz=8yz+8xz\Rightarrow z=\frac{9}{8}x$$

نعوض في الشرط المطلوب

$$x\cdot y\cdot z=x\cdot x\cdot\frac{9}{8}x=4608\Rightarrow x^3=4096\Rightarrow x=16$$

$y=16$

$z=18$

السؤال الرابع (a): نتحقق فيما اذا كانت المعادلة المعطاة تامة أم لا ، لدينا

$$\left.\begin{aligned} M &= \cos(x+y) \\ N &= 3y^2+2y+\cos(x+y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= -\sin(x+y) \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= -\sin(x+y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{المعادلة تامة}$$

والآن بالمكاملة يمكننا الحصول على الحل العام ضمنياً على النحو الآتي :

$$u = \int M \cdot dx + k(y) = \int \cos(x+y)\, dx + k(y) = \sin(x+y) + k(y) \sim (*)$$

لتحديد $k(y)$ ، نفاضل بالنسبة للمتحول $y$ ، فنجد

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x+y) + \frac{\partial k}{\partial y} = N = 3y^2+2y+\cos(x+y)$$

اذاً : $\frac{\partial k}{\partial y} = 3y^2+2y$ وبالمكاملة فينتج $k = y^3+y^2+c$

نعوض في $(*)$ فنحصل على

$$u(x,y) = \sin(x+y) + y^3 + y^2 + c$$

حيث $c$ ثابت تكامل .

---

(b). إن المعادلة المعطاة من الشكل $y' + P(x)y = Q(x)$ حيث

$$y' - \left(\frac{2}{x}\right) y = x$$

إذاً $P(x) = -\frac{2}{x}$ ، وعندئذٍ يكون لدينا

$$\int P(x) \cdot dx = -\int \frac{2}{x} \cdot dx = -\ln x^2$$

وبالتالي فإن عامل التكميل :

$$e^{\int P(x)\cdot dx} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{e^{\ln x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

وعليه يمكن الآن أن نضرب المعادلة بعامل التكميل فنجد :

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x^2}\right] = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$\Rightarrow y = x^2(\ln|x| + c)$$

**السؤال الخامس:** يمكن أن نكتب المعادلة المعطاة على النحو الآتي

$$(2y+1)\,dy = 2x\cdot dx$$

نكامل الطرف الأيسر بالنسبة للمتحول $y$ والطرف الأيمن بالنسبة لـ $x$، فنجد

$$y^2+y=x^2+c$$

حيث أن $c$ ثابت المكاملة، وبما أن $y(2)=0$، فإن

$$y(2)^2+y(2)=2^2+c \Longrightarrow c=-4$$

إذاً: $y^2+y=x^2-4$

ومنه $y=\pm\sqrt{4x^2-15}-\frac{1}{2}$

هنا لدينا حلين للمعادلة التفاضلية المعطاة، ولكن أحدهما فقط يحقق الشرط الابتدائي المعطى وهو الحل لمسألة القيم الحدية المعطاة:

$$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4x^2-15}-1\right)$$

لتحديد المجال الذي يكون فيه الحل موجوداً، يجب أن يحقق المجال المتضمن للعدد 2 في الكمية الواقعة تحت الجذر موجباً، أي أن المجال المطلوب هو $x>\frac{\sqrt{15}}{2}$

---

**السؤال السادس (a)** لبيان أن $y_1(t)=t$ هو حل لمعادلة ريكاتي، نشتق فنجد $y_1'(t)=1$، ومن ثم نعوض في المعادلة المعطاة، فنجد

$y_1'+2ty_1=1+2t^2$ (الطرف الأيسر)

$1+t^2+y_1^2=1+t^2+t^2=1+2t^2$ (الطرف الأيمن)

$\Longleftarrow$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

إذاً $t=y_1(t)$ حل المعادلة التفاضلية المعطاة

(b) لدينا $y(t)=t+\frac{1}{v(t)} \Longrightarrow y'=1-\frac{1}{v^2}v'$، نعوض في المعادلة المعطاة، فيكون

$$1-\frac{1}{v^2}\cdot v'+2t\left(t+\frac{1}{v}\right)=1+t^2+\left(t+\frac{1}{v}\right)^2$$

بالإصلاح، فينتج

$$v'(t)=-1$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالنسبة للمتحول $v$